

秋季募集（令和6年度実施）

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学A MATHEMATICS A

令和6年8月27日(火)

10:00～11:30

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験記号番号を記入すること。
3. 全ての問題を解答すること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験記号番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

数学 A MATHEMATICS A

1. 次の関数を考える.

$$y = f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $\cos x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開することで, $f(x)$ の近似を x^4 の項まで求めよ.
- (2) $y = f(x)$ における $x \rightarrow 0$ の極限を求めよ.
- (3) $y = f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け. ただし, $0 < x \leq 2\pi$ とする.
- (4) 積分範囲を $0 \leq x \leq 1$, $x \geq 1$ に分けて考え, 次の広義積分が収束するかどうかを判定せよ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx$$

数 学 A MATHEMATICS A

2. 三次元デカルト座標系 (x, y, z) において, ベクトル A が

$$A = y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{i} - x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{k}$$

により与えられる. ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである. また, 領域 D が

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, z \geq 0\}$$

により与えられるものとし, 領域 D の表面を曲面 S とする. なお, 円筒座標系および三次元極座標系は, それぞれ (ρ, ϕ, z) および (r, θ, ϕ) で表されるものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\nabla \cdot A, \nabla \times A$ を三次元デカルト座標系で求めよ.
- (2) x, y, z を円筒座標系で示せ.
- (3) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ($0 \leq z \leq 1$) を三次元デカルト座標系上に描け. 必要であれば問(2)の結果を用いよ.
- (4) 三次元デカルト座標系から三次元極座標系へ座標変換する際のヤコビアンを求めよ.
- (5) 面積分 $\int_S A \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ. ただし, \mathbf{n} は S の外向き単位法線ベクトルである.

数学 A MATHEMATICS A

3. 2×2 の行列 A が、次式で与えられている。

$$A = \begin{pmatrix} 7a+9 & 24a-12 \\ 24a-12 & 16-7a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ。ただし、 a は正の定数で $a \neq \frac{1}{2}$ とする。

- (1) 行列 A の固有値が、 $25a$ と $25(1-a)$ であることを、固有方程式から示せ。
- (2) 行列 A の正規化された固有ベクトルを 2 つ求めよ。
- (3) 行列 D を 2×2 の対角行列、行列 P を 2×2 の行列とする。問(2)の結果を利用して、 $A = PDP^{-1}$ となる行列 D と P を求めよ。ただし、行列 P の対角成分は正の数とする。
- (4) 問(3)の結果を用いて

$$f(x, y) = (7a+9)x^2 - 2(24a-12)xy + (16-7a)y^2 = 1$$

の形状を述べよ。