

令和5年度 春季募集

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学A MATHEMATICS A

令和6年2月28日(水) 10:00 ~ 11:30

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験記号番号を記入すること。
3. 全ての問題を解答すること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験記号番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

数学 A MATHEMATICS A

1. a を正の定数とするとき, xy 平面において θ を媒介変数として,

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) この曲線の長さ l を求めよ.
- (2) この曲線の囲む領域の面積 S を求めよ.

数 学 A MATHEMATICS A

2. 3×3 の行列 A が, 次式で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} a & a-b & 0 \\ a-b & b & b-a \\ 0 & b-a & a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ. ただし, a, b は実数の定数で, $a > b$ とする.

- (1) 行列 A の固有値を, 固有値方程式から求めよ.
- (2) 行列 A の正規化された固有ベクトルを 3 つ求めよ.
- (3) 問(2)で得られた固有ベクトルは互いに直交することを示せ.
- (4) 行列 D を 3×3 の対角行列, 行列 P を 3×3 の行列とする. 問(2), (3)の結果を利用して, $A = PDP^{-1}$ となる行列 D と P を求めよ.

数 学 A MATHEMATICS A

3. 三次元デカルト座標系 (x, y, z) において, ベクトル A が

$$A = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + x^2, \frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 3x + 5y^2, \frac{z-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 3x + 2z^2 \right)$$

により与えられる. また, 領域 D が

$$D = \{ (x, y, z) \mid x^2 + (y-z)^2 \leq 1 \}$$

により与えられるものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\nabla \times A$ を三次元デカルト座標系で求めよ.
- (2) 領域 D を描け.
- (3) 平面 $y+z=1$ 上の点の位置ベクトル r と, この平面の単位法線ベクトル n を求めよ. ただし, n の z 成分は非負とする.
- (4) 領域 D において $y+z=1$ を満たす平面を S とする. S の概形を図示し, その面積を求めよ.
- (5) 線積分 $\int_C A \cdot dr$ を求めよ. ただし, C は問(4)で求めた S の周回である.