和

令和５年度 秋季募集

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学Ａ　MATHEMATICS A

令和５年８月２９日(火)　　10:00 ～11:30

注 意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題を解答すること．また，答案用紙には選択した問題番号を明記すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数 学A　MATHEMATICS A

1．以下の問いに答えよ．

(1) 次の関数の$x = 0$の近傍における３次までのテイラー展開を求めよ．

$$f(x) = e^{2x}\cos x$$

(2) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx \qquad (a > 0)$$

(3) 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D \sin(x + y)dxdy \ , \ D = \{(x, y) | x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq \pi\}$$

数 学 A　MATHEMATICS A

2．三次元デカルト座標系 (x, y, z) において，ベクトル $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{x} + z^2\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{y} + z^2\right)\boldsymbol{j} + \frac{1}{z}\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである．また，領域 D_1，D_2 が

$$D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

により与えられるものとし，領域 D_1 のうち，領域 D_2 が重なる領域を除いたものを領域 D_3 とする．さらに，領域 D_3 の表面のうち，領域 D_1，D_2 の表面に相当する面をそれぞれ曲面 S_1，S_2 とする．なお，三次元極座標系および円筒座標系は，それぞれ (r, θ, ϕ) および (ρ, ϕ, z) で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を三次元デカルト座標系で求めよ．

(2) 領域 D_3 を図示せよ．

(3) 曲面 S_1 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ および三次元極座標系の変数 θ，ϕ を用いて表し，θ および ϕ の範囲を示せ．また，曲面 S_2 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ および円筒座標系の変数 ϕ，z を用いて表し，ϕ および z の範囲を示せ．

(4) 曲面 S_1 の面積と曲面 S_2 の面積の和を求めよ．

数 学 A　MATHEMATICS A

3. ２つの3×3の行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が，次式で与えられている．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & b & -1 \\ -1 & -1 & b \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．ただし，b は実数の定数とする．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を，固有値方程式から求めよ．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の正規化された固有ベクトルを３つ求めよ．さらに，これらの３つのベクトルが直交していない場合には，互いに直交する正規化された固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{D}$ を3×3の対角行列，行列 $\boldsymbol{P}$ を3×3の行列とする．問(２)の結果を利用して，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ となる行列 $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(5) 行列 $\boldsymbol{D}_B$ を3×3の対角行列，行列 $\boldsymbol{P}_B$ を3×3の行列とする．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_B\boldsymbol{D}_B\boldsymbol{P}_B^{-1}$ となる行列 $\boldsymbol{D}_B$ と $\boldsymbol{P}_B$ を求めよ．