

令和5年4月入学

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学B MATHEMATICS B

令和5年2月28日(火) 13:00 – 14:30

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること。
3. **全ての問題を回答すること。** 問題ごとに2枚の答案用紙を用いること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \quad 4 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + xy = \frac{x}{y}$$

$$(3) \quad (x^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$$

2. 関数 $y(t)$ のラプラス変換を次のように定義する.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

以下の問いに答えよ. ただし, 必要であれば,

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{および} \quad \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad (a \text{ は正の定数})$$

を用いてよい.

(1) $\mathcal{L}\{t y(t)\} = -\frac{d}{ds} Y(s)$ を示せ.

(2) $\mathcal{L}\{t \cos t\}$ および $\mathcal{L}\{t \sin t\}$ を求めよ.

(3) 以下の式の両辺を逆ラプラス変換することで, $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ.

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s^2+1}$$

(4) $\frac{dy}{dt} + y(t) = t \cos t$, $y(0) = 1$ のとき, $Y(s)$ を求めよ.

(5) 問 (4) の $y(t)$ を求めよ.