

春季募集（令和 6（2024）年度実施）

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学B MATHEMATICS B

2025年3月4日(火)

13:00 ～14:30

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験記号番号を記入すること。
3. 全ての問題を回答すること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験記号番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) (2y - x^2) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} - 2xy = 0$$

$$(2) \frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{xy^2} = 5x^2 + 3$$

(ヒント: $u = y^{-2}$ と置く)

$$(3) \frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}$$

2. 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を次のように定義する.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

また, 関数 $u(t)$ を次のように定義する.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

a を正の定数とし, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の 2 式を示せ.

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t)\} = F(s) - \int_0^a f(t) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

(2) $g(t) = u(t-1) - u(t-2)$ のとき, $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ を求めよ.

(3) 問(2) の $G(s)$ が $G(s) = (s^2 - 4s + 3)F(s)$ を満たすとき, $f(t)$ を求めよ.

(4) $g(t)$ が次のように与えられるとき, $g(t)$ のラプラス変換を求めよ.

$$g(t) = u(t-1) - u(t-2) + u(t-3) - u(t-4) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u(t-n)$$