

春季募集（令和 6（2024）年度実施）

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学 A MATHEMATICS A

2025年3月4日(火)

10:00 ～11:30

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験記号番号を記入すること。
3. 全ての問題を解答すること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験記号番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

数 学 A MATHEMATICS A

1. a を正の定数とすると、 xy 平面において θ を媒介変数として、

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) この曲線を xy 平面上に図示せよ。
- (2) この曲線の長さ l を求めよ。

2. 三次元デカルト座標系 (x, y, z) において, ベクトル A が

$$A = \frac{x^2\sqrt{y^2+z^2}}{2} \mathbf{i} + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \mathbf{j} + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \mathbf{k}$$

により与えられる. ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである. S を次の領域

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

の表面とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\nabla \cdot A, \nabla \times A$ を三次元デカルト座標系で求めよ.
- (2) 領域 D の概形を三次元デカルト座標系上に図示せよ.
- (3) $x=x, y=\rho \cos \phi, z=\rho \sin \phi$ とおく. ただし, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ とする. このとき, 領域 D における ρ と ϕ の範囲をそれぞれ示せ.
- (4) 三次元デカルト座標系 (x, y, z) から問(3)で定義される座標系 (x, ρ, ϕ) へ変換を行う際のヤコビアンを求めよ.
- (5) 面積分 $\int_S A \cdot \mathbf{n} \, dS$ を求めよ. ただし, $\mathbf{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである.

数 学 A MATHEMATICS A

3. 2×2 の行列 A が次式で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 2a+1 \\ a-1 & -1 \end{pmatrix}$$

ただし, a は 0 よりも大きい実数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の固有値を求め, A が異なる 2 つの固有値を持つことを示せ.
- (2) 行列 A の異なる 2 つの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) $a=1$ のとき, $A = PDP^{-1}$ となる行列 D と P を求めよ. ただし, 行列 D を 2×2 の対角行列, 行列 P を 2×2 の整数行列(全ての成分が整数)とする.