

秋季募集（令和 7（2025）年度実施）

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子
【専門科目】

流体力学	FLUID DYNAMICS	p. 1
電磁気学	ELECTROMAGNETICS	p. 2
量子力学	QUANTUM MECHANICS	p. 3
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	p. 5
放射線基礎	RADIATION BASICS	p. 6

2025年8月27日(水) 10:00 ～11:30

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票2枚が配付されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 選択した科目を選択票および答案用紙に記入すること。1科目につき2枚の答案用紙を使用すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

図1に示すように、水平面に対して角度 θ で傾いた広く滑らかな平板の上を、密度 ρ 、粘性係数 μ の液体であるニュートン流体が流れている。この流体の自由表面と平板間の距離は場所によらず h で一定である。平板の傾斜面に沿う方向を x 軸、その垂直方向を y 軸とし、平板表面を $y = 0$ とする。流れは2次元定常層流で、 x 方向速度 $u = u(y)$ 、 y 方向速度 $v = 0$ である。流体中に、全ての面が座標軸に垂直または平行な面を持つ直方体の微小検査体積を考える。この微小検査体積について、最左点の座標を (x, y) 、 x 方向および y 方向長さをそれぞれ Δx 、 Δy とし、各面に作用する垂直応力 σ およびせん断応力 τ をそれぞれ $\sigma_x, \tau_x, \sigma_{x+\Delta x}, \tau_{x+\Delta x}, \sigma_y, \tau_y, \sigma_{y+\Delta y}, \tau_{y+\Delta y}$ とする。流体中の圧力を $p = p(x, y)$ 、重力加速度を g とし、 ρ, μ, g は一定として、以下の間に答えよ。

- (1) $\sigma_x, \tau_x, \sigma_y, \tau_y$ それぞれを、 p, u, y, μ の中から必要なものを用いて表せ。
- (2) y 方向の力のつり合いを $g, \Delta x, \Delta y, \theta, \rho, \sigma_y, \sigma_{y+\Delta y}, \tau_x, \tau_{x+\Delta x}$ を用いて表せ。
- (3) 問(2)の結果を用い、 y 方向の運動方程式を求め g, p, y, θ, ρ を用いて表せ。
- (4) 問(3)で求めた方程式を解き、 p を求めよ。ただし、自由表面上の圧力は場所によらず $p = p_0$ で一定であるとする。
- (5) 問(4)の結果を用い、 x 方向の運動方程式を求めよ。
- (6) 問(5)で求めた方程式を解き、 τ_y と u の分布を求めよ。ただし、自由表面では $\tau_y = 0$ とする。

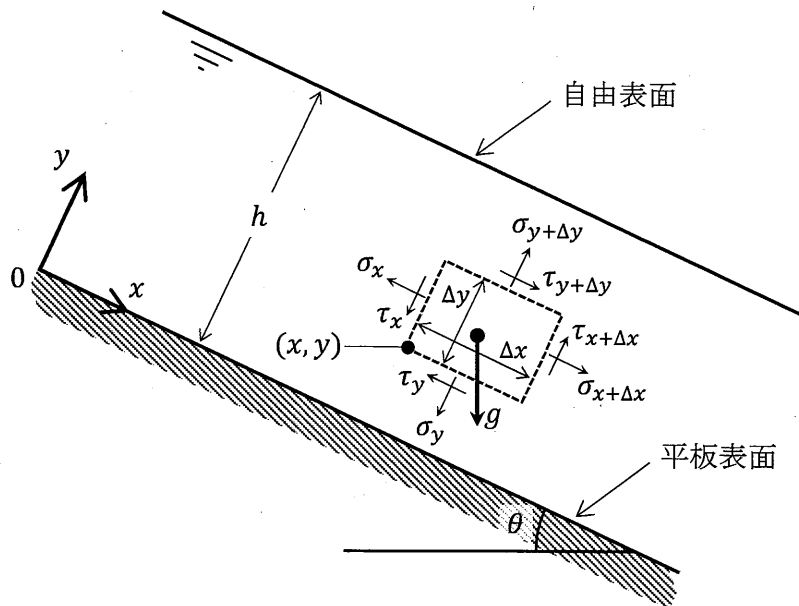


図 1

電 磁 気 学 ELECTROMAGNETICS

図1に示すように、無限に長い直線電流 I と同一平面に、一辺の長さ a 、抵抗 R 、巻き数1の正方形コイルがある。直線電流から正方形コイルまでの距離は s である。以下の問いに答えよ。ただし、正方形コイルの導線の断面積と正方形コイルに誘導される電流が作る磁場は無視できるものとする。また、透磁率を μ_0 とする。

- (1) 正方形コイルを貫く磁束 Φ を求めよ。
- (2) 電流 I を以下のように時間変化させたときに、正方形コイルに生じる起電力 ε および正方形コイルに流れる電流 i の大きさを求めよ。ただし、 t は時間、 λ および I_0 は正の定数である。

$$I(t) = \begin{cases} (1 - \lambda t)I_0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{\lambda}) \\ 0 & (\frac{1}{\lambda} < t) \end{cases}$$

- (3) 問(2)において電流 i の向きを理由と共に答えよ。
- (4) 問(2)において $t = 0$ から $t = \infty$ の間に正方形コイルの導線の任意の断面を通過する総電荷 Q を求めよ。
- (5) 問(2)において正方形コイルに作用する力の大きさとその向きを求めよ。

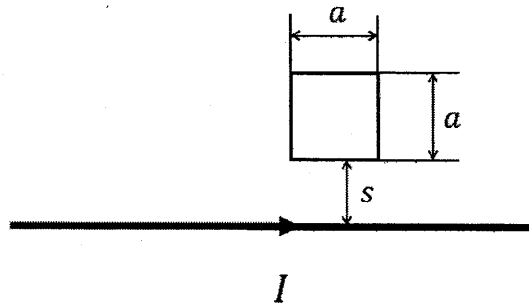


図 1

量子力学 QUANTUM MECHANICS

以下の問(1)～(3)に答えよ. なお, h はプランク定数で, $\hbar = h/(2\pi)$ である. また, 問(1)および問(3)では運動学における相対論的效果を無視し, 問(2)においては必要があれば相対論的效果を考慮してよい.

- (1) 三次元極座標空間 (r, θ, ϕ) において, 水素原子の軌道電子が半径 r と $r+dr$ の2つの球面の間にある確率を $P_r(r)dr$ とする. また, n を主量子数, l を軌道量子数とする. 軌道確率密度 $P_r(r)$ は, $n=1, l=0$ および $n=2, l=1$ の場合に, 以下のように与えられる.

$$P_r(r) = \frac{4r^2}{r_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{r_0}\right) \quad (n=1, l=0)$$

$$P_r(r) = \frac{r^4}{24r_0^5} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \quad (n=2, l=1)$$

ここで r_0 はボーア半径である. 以下の問いに答えよ.

- a) $P_r(r)$ が極値となるときの r を, $n=1, l=0$ および $n=2, l=1$ の場合, それぞれに対してすべて求めよ.
 - b) $n=1, l=0$ および $n=2, l=1$ の場合の水素原子の軌道電子を見出す確率が最も高い半径をそれぞれ r_{10} および r_{21} とする. r_{21} の r_{10} に対する比を求めよ.
- (2) 静止した自由電子と衝突する光子を考える(図 1). 入射および散乱光子の波長はそれぞれ λ_0 および λ' で, 光子の散乱角は φ である. 反跳電子の運動量および反跳角はそれぞれ p および θ である. 以下の問いに答えよ.
- a) 散乱前後で光子の入射方向と、それに垂直な方向に関する運動量保存の式を書け.
 - b) 反跳電子のド・ブローイ波長を λ_0, λ' および φ を用いて表せ.

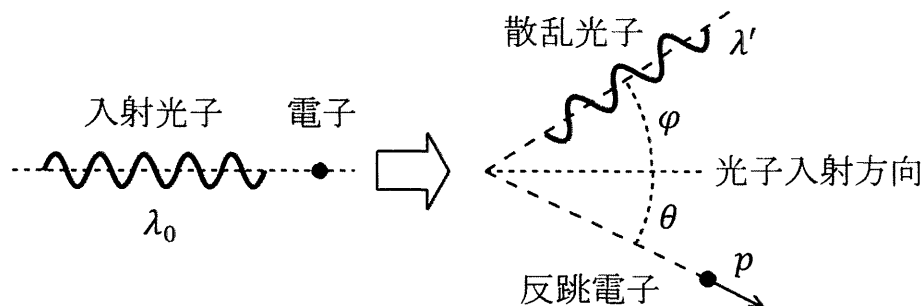


図1

(問(3)は次ページ)

- (3) 一次元調和振動子ポテンシャル $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ における粒子（質量 m ）に対する固有状態の波動関数 $u_n(x)$ とエネルギー固有値 E_n はそれぞれ,

$$u_n(x) = N_n H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2} \quad \text{および} \quad E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

で与えられる．ここで, $N_n = (\alpha/(\sqrt{\pi} 2^n n!))^{1/2}$ および $\alpha = \sqrt{(m\omega/\hbar)}$ であり, ω は角振動数である． $H_n(\alpha x)$ は n 次のエルミート多項式で,

$$H_n(\alpha x) = (-1)^n e^{(\alpha x)^2} \frac{d^n e^{-(\alpha x)^2}}{d(\alpha x)^n}$$

により表される．ここで $H_0(\alpha x) = 1$ である．以下の問いに答えよ．

- a) 一次元ポテンシャル $W(x)$ が

$$W(x) = \begin{cases} m\omega^2 x^2/2 & (0 \leq x) \\ \infty & (x < 0) \end{cases}$$

であるとき, $0 \leq x$ における粒子の基底状態波動関数を求めよ．

- b) 問 a)において, $0 \leq x$ におけるエネルギー固有値 E_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ．

材 料 力 学 STRENGTH OF MATERIALS

各々異なる脆性材料で作られた中実丸棒と中空丸棒がある。中実丸棒は、長さ L 、直径 d_1 、せん断弾性係数 G_1 、引張強さ σ_{F1} であり、中空丸棒は、長さ L 、内径 d_1 、外径 d_2 、せん断弾性係数 G_2 、引張強さ σ_{F2} である。以下の問いに答えよ。

- (1) 中空丸棒の左端を剛体壁に固定し、右端にねじりモーメント M_t を作用させた。中空丸棒のねじれ角と最大せん断応力を求めよ。
- (2) 図 1 に示す様に中実丸棒を中空丸棒に挿入して組み合わせ丸棒をつくった。組み合わせ丸棒の左端は剛体壁に固定し、右端には剛体の円板を接着した。その後、円板を角度 ϕ だけ回転させた。このとき、円板に作用させたねじりモーメントを求めよ。
- (3) 問(2)において、 ϕ を徐々に増加させたときに、中実丸棒が中空丸棒よりも先に破壊するための条件を d_1 、 d_2 、 G_1 、 G_2 、 σ_{F1} 、 σ_{F2} を用いて表せ。また、その際に、棒の軸方向に対してどの角度に亀裂ができると予測されるかを理由とともに答えよ。

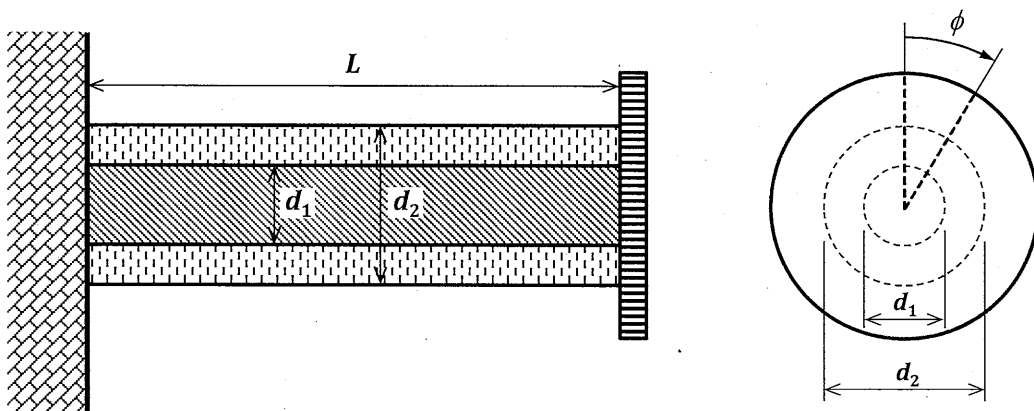


図 1

放射線基礎 RADIATION BASICS

1. 次の問いに答えよ. なお, $\log_e 2 = 0.70$, アボガドロ定数 $= 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ とする.

(1) 試験管の中に 1.0 g の ^{235}U (92 番元素, α 壊変, 半減期 7.0×10^8 年) と, 2.4 mg の ^{237}U (β^- 壊変, 半減期 7.0 日) が存在している.

a) ^{237}U の娘核種の原子番号と質量数および壊変形式を答えよ.

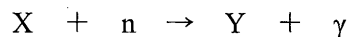
b) 試験管中のウランの比放射能(Bq/g)を求めよ.. 有効数字は 2 桁とする.

(2) ある希土類鉱石を溶解した 2.0 L の水溶液がある. この水溶液に抽出剤を含む 1.0 L の有機溶媒を接触させて, ネオジムとサマリウムの溶媒抽出を行ったところ, 抽出後の有機相中の ^{143}Nd の濃度は $m_1 \text{ mol/L}$, ^{147}Sm の濃度は $n_1 \text{ mol/L}$ となった. この抽出のネオジムとサマリウムの分配比は, それぞれ $D(\text{Nd}) = 8.0$, $D(\text{Sm}) = 1.0 \times 10^1$ である.

a) 溶解前の希土類鉱石に含まれていた ^{143}Nd と ^{147}Sm の物質量(mol)を示せ.

b) ^{147}Sm は天然放射性核種であり半減期 1.0×10^{11} 年で α 壊変し ^{143}Nd (安定同位体) となる. この希土類鉱石が形成された時には ^{143}Nd が $m_0 \text{ mol}$ 含まれていた. 与えられた条件を用いて, 鉱石が形成されてからの経過時間 t (年) を示す式を書け.

2. 以下の核反応によって安定核種 X (原子番号: Z , 質量数: M , 静止質量: m_X) から放射性核種 Y (静止質量: m_Y) が生成される.



ここで, n は中性子, γ はガンマ線を表しており, この核反応の Q 値は q である. また, Y の壊変形式は β^- 壊変のみであり, その壊変定数は λ である. N_X 個の X の原子核に単色の中性子線を一定の線束 f で照射したとき, 照射開始から時間 t が経過した後の Y の原子核の数は N 個であった. このときのミクロ核反応断面積は σ であり, N_X が一定とみなせるとする. 真空中での光速が c であるとき, 文中に定義されている記号の中から必要なものを用いて以下の問いに答えよ.

(1) Y, および, Y が壊変した後の原子核の原子番号と質量数をそれぞれ答えよ.

(2) 中性子の静止質量はどのように表現できるか, 答えよ.

(3) Y の原子核数の単位時間当たりの変化量 dN/dt を表す式を示せ.

(4) $t = T$ において中性子線の照射を終了し, 生成された Y の放射能を即時に測定した. 生成された放射能が測定値の半分であった時間 $T_{\text{half}} (< T)$ を求めよ.