

秋季募集（令和 7（2025）年度実施）

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学B MATHEMATICS B

2025年8月26日(火) 13:00 ～14:30

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験記号番号を記入すること。
3. 全ての問題を回答すること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験記号番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \left(y^2 - \frac{3x}{y} + 2\right) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{x^3}{y} + \frac{2x}{y} - 3\right) = 0$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4}y = \sin \frac{x}{2}$$

$$(3) x \exp(x - 2y) + y \exp(-x + y) \frac{dy}{dx} = 0$$

2. 関数 $y(t)$ のラプラス変換を次のように定義する.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

また, a を正の定数とし, 関数 $u(t)$, $p_a(t)$, $\delta(t)$ をそれぞれ次のように定義する.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$p_a(t) = u(t) - u(t-a)$$

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_a(t)}{a}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) $p_a(t)$ のラプラス変換を求めよ.
- (2) $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ を示せ. ただし, 積分と極限操作は可換であるとする.
- (3) $\delta(t-a)$ のラプラス変換を求めよ.
- (4) $y(t)$ は次の微分方程式を満たすものとする.

$$y'' + 4y' + 13y = u'' - 2u' + u$$

両辺をラプラス変換し, $Y(s)$ を $U(s)$ で表せ. ただし, $U(s)$ は $u(t)$ のラプラス変換であり, $y(0) = y'(0) = u(0) = u'(0) = 0$ とする.

- (5) 問(4)で $u(t) = \delta(t-a)$ のとき, $y(t)$ を求めよ.