

秋季募集（令和 7（2025）年度実施）

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学A MATHEMATICS A

2025年8月26日(火) 10:00 ～11:30

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験記号番号を記入すること。
3. 全ての問題を解答すること。また、答案用紙には選択した問題番号を明記すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験記号番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{1}{2} \cos \sqrt{x} dx$$

(2) 以下の領域 D を xy 平面上に図示するとともに, 次の重積分を求めよ.

$$\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) | x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad xy \geq \sqrt{3}, \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$$

数 学 A MATHEMATICS A

2. 三次元デカルト座標系 (x, y, z) において、ベクトル $\mathbf{A}$ が

$$\mathbf{A} = (x + y)\mathbf{i} + (2x - z)\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$$

により与えられる。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである。

平面 $3x + 2y + z = 6$ が三次元デカルト座標系の座標軸と交わる 3 点 P, Q, R を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする。 S の原点を向いていない側を S の表とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\nabla \cdot \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}$ を三次元デカルト座標系で求めよ。
- (2) 三角形 S の原点からの最短距離を求めよ。
- (3) 三角形 S の裏側から表側へ向かう単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ および面積 s を求めよ。
- (4) 経路 C を $PQ + QR + RP$ とする場合の線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよ。

3. 2×2 の行列 A と $f(x, y)$ が次式で与えられている.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A の 2 つの固有値と正規化された固有ベクトルを求めよ.
- (2) 行列 D を 2×2 の対角行列, 行列 P を 2×2 の行列とする. 問 (1) の結果を利用して,
 $A = PDP^{-1}$ となる行列 D と行列 P を求めよ. ただし, 行列 P の対角成分は正の数とする.
- (3) $f(x, y)$ が以下の形に変形できるとき, 行列 Q を求めよ.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (4) 問 (2) で求めた行列 P を用いて x と y を以下のように変換する. 問 (2) および問 (3) の結果を利用して楕円 $f(x, y) = 1$ の長軸と短軸の長さを求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$